



Математические модели формирования складкообразования, надвигов и впадин; сравнение с аналоговыми экспериментами

Бабичев¹ А.В., Полянский¹ О.П., Коробейников² С.Н.,
Ревердатто В.В.

*1. Институт геологии и минералогии им. В.С.Соболева СО
РАН, 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия*

*2. Институт гидродинамики им. М.А. Лавреньева СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 15, Россия*

[*babichev@igm.nsc.ru*](mailto:babichev@igm.nsc.ru)



Мотивация

Численные и аналоговые эксперименты представляют два разных подхода к описанию эволюции геологических структур, таких как осадочные бассейны, складки, надвиги и впадины.

Результаты натуральных экспериментов могут быть основой для калибровки и уточнения математических моделей там, где это возможно.

Там где невозможно поставить аналоговый эксперимент математическое моделирование является наиболее подходящим и быстрым, а зачастую и единственным способом получить ясную картину того или иного природного процесса, получить количественные оценки.



Цель исследования

Сравнить результаты математического моделирования складкообразования надвигов, впадин с результатами численных экспериментов представленных в (Buiter, S.J.H. et al. Geological Society, London, Special Publications. 2006)

Сравнить полученные результаты с результатами аналоговых экспериментов (Schreurs G. et al. Geological Society, London, Special Publications January 1. 2006)

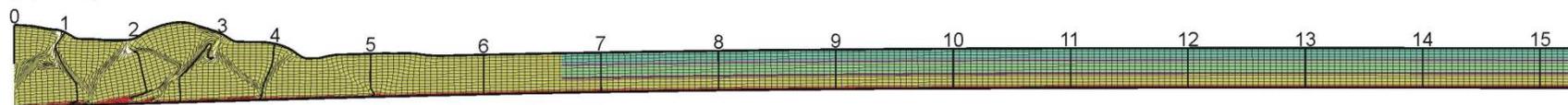
Сделать оценку возможности применения выбранной численной схемы, постановки задачи и метода для задач формирования складок, надвигов и впадин в земной коре.



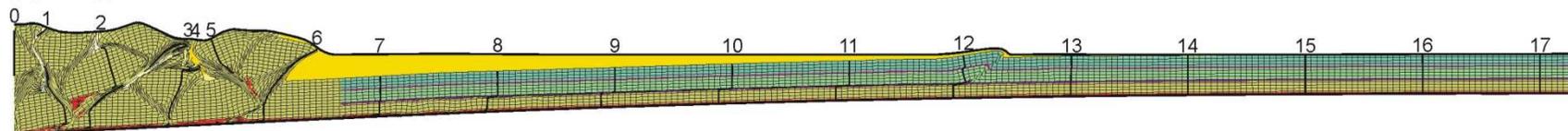
Математическое моделирование надвигов природных масштабов



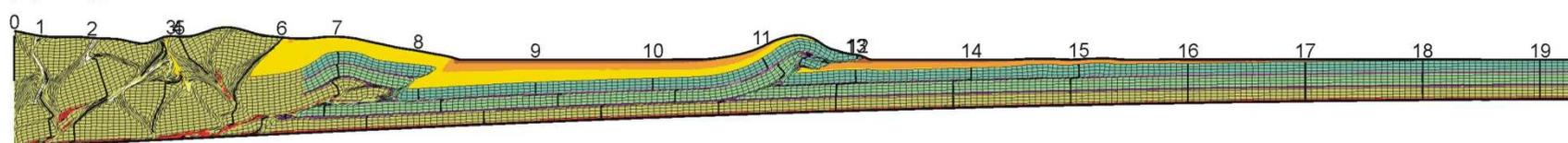
(a) 3 My, $\Delta x = 30$ km



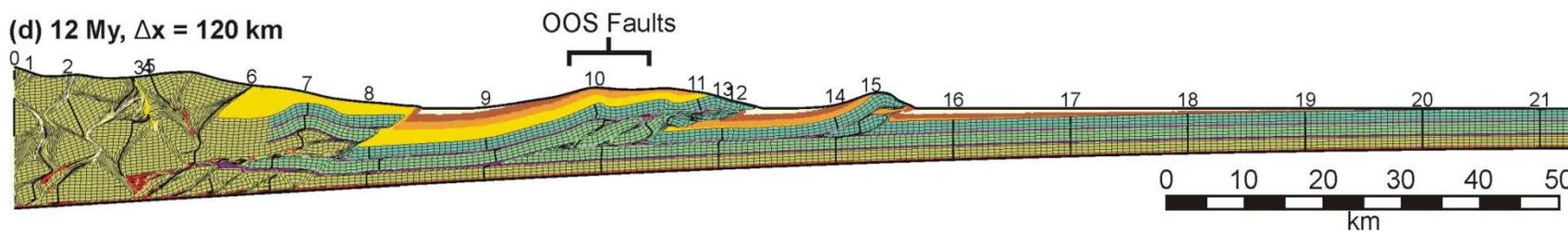
(b) 6 My, $\Delta x = 60$ km



(c) 9 My, $\Delta x = 90$ km



(d) 12 My, $\Delta x = 120$ km



Stockmal et al., Figure 10, part 1 (Price vol).



Математическое моделирование

Использовались нелинейные уравнения механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Дискретизация уравнений МДТТ проводилась с помощью метода конечных элементов (МКЭ) и была проведена пакетом прикладных программ **MSC.Marc**, позволяющим учесть все виды нелинейности уравнений МДТТ (предполагалось выполнение условий плоской деформации). Математическое моделирование геологических процессов требует учета всех типов нелинейности.

Результаты натурных экспериментов сильно зависят от граничных условий, геометрических параметров модели и реологических свойств материалов, используемых в опыте каждого автора.

Результаты математического моделирования образования надвига, складок и впадины чувствительны к выбору реологического закона материала (модель пластичности, вязкости), выбору констант материала, а также к дискретизации моделируемой области и выбору шага интегрирования уравнений МДТТ. Влияние выбора реологического закона на результаты математического моделирования геологических процессов показано в (Коробейников и др. 2011).



Уравнения квазистатического деформирования твердых тел, записанные в приращениях



- Рассматриваем UL-формулировку уравнений с учетом геометрической нелинейности деформирования.
- Рассматриваем вариант UL-формулировки, когда в определяющих соотношениях, сформулированных в скоростях, в качестве скорости изменения тензора напряжений Коши используется производная Хилла этого тензора.

$$\int_V \mathbf{s} : \delta \mathbf{d} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S_T} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{v} dS \quad \forall \delta \mathbf{v} (\delta \mathbf{v} = 0 \text{ на } S_v).$$

Кинематические соотношения: $\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$.

Определяющие соотношения

упругопластического материала: $\mathbf{s}^H = \mathbf{C}^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^P)$, $\mathbf{d}^P = c\lambda \frac{\partial F}{\partial s}$ где

$$\mathbf{s}^H \equiv \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{s} \operatorname{tr} \mathbf{d}, \quad \text{а}$$

\mathbf{w} – антисимметричный тензор вихря $\mathbf{w} \equiv \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v}^T - \nabla \mathbf{v})$.



Определяющие соотношения упругопластического материала:

$\mathbf{s}^H = \mathbf{C}^{EP} : \mathbf{d}$, где \mathbf{C}^{EP} - тензор четвертого ранга

$$\mathbf{C}^{EP} = \mathbf{C}^E - c(\mathbf{C}^E : \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} : \mathbf{C}^E) \frac{1}{\mathbf{n} : \mathbf{C}^E : \mathbf{n}},$$

$$\mathbf{n} \equiv \frac{1}{k} \frac{\partial F}{\partial s}.$$

$$F_1(s) \equiv \sqrt{J_2} - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \quad - \text{ функция текучести Хубера-Мизеса}$$

$$F_2(s) \equiv \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_y = \sqrt{3}c \cos \Phi \quad - \text{ функция текучести Друкера-Прагера}$$

$$F_3(s) \equiv (3J_2 + \sqrt{3}\beta\sigma_y J_1)^{\frac{1}{2}} - \sigma_y \quad - \text{ параболическая функция текучести Друкера-Прагера}$$



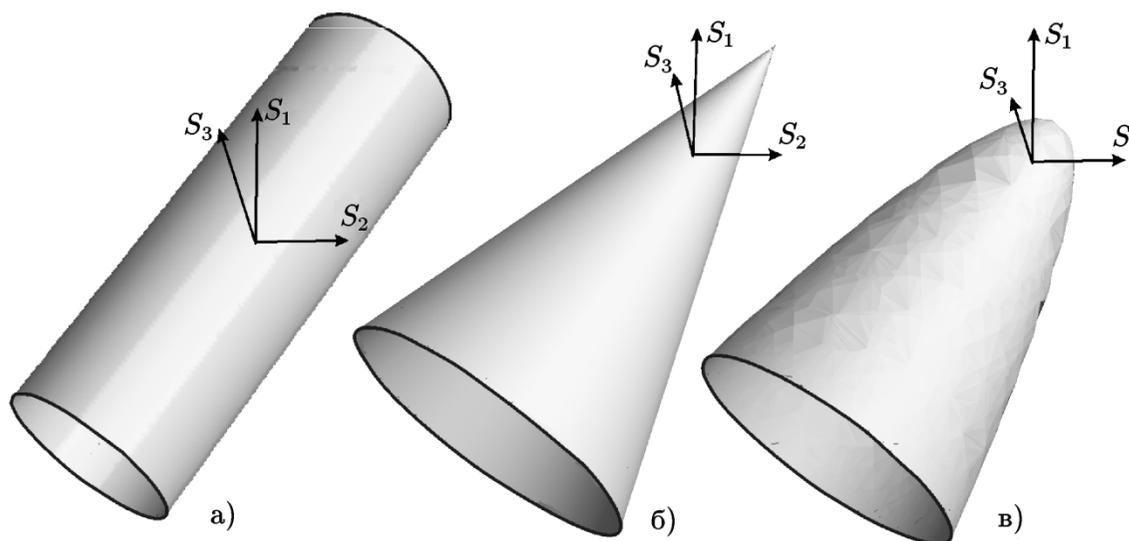
Пространственная дискретизация уравнений:

$$\delta \mathbf{U}^T {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = \delta \mathbf{U}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}) \quad \forall \delta \mathbf{U} \in R^{NEQ},$$

В силу произвольности векторов $\delta \mathbf{U}$ получаем эквивалентные уравнения:

$${}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F},$$

Решение ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$, ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}$ в момент времени $t + \Delta t$ уточняется методом Ньютона - Рафсона.



Поверхности текучести: а) Хубера–Мизеса; б) коническая Друкера–Прагера; в) параболическая Друкера–Прагера



Постановка задачи

Сжатие песка в ящике, международный тест
(Buiter, S.J.H. et al. 2006, Schreurs G. et al. 2006)

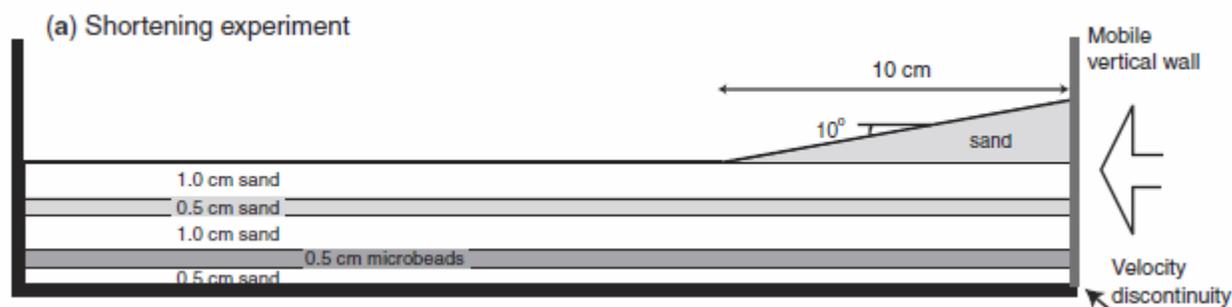


Table 1. Material properties

Material	Values in numerical models					Measured analogue properties*				
	Density (kg m^{-3})	C (Pa)	$\phi_{\text{peak}}^{\dagger}$	$\phi_{\text{stable}}^{\dagger}$	η (Pa s)	Density (kg m^{-3})	C (Pa)	$\phi_{\text{peak}}^{\dagger}$	$\phi_{\text{stable}}^{\dagger}$	η (Pa s)
Sand	1560	10	36°	31°		1350–1740	3–150	33°–45°	28.2°–39°	
Microbeads	1480	10	22°	20°		1400–1600	–25–50	21°–29.2°	20°–26.2°	
PDMS	965				5e4	965				5e4
Side friction		0	19°	19°				20°§	16°–17°§	

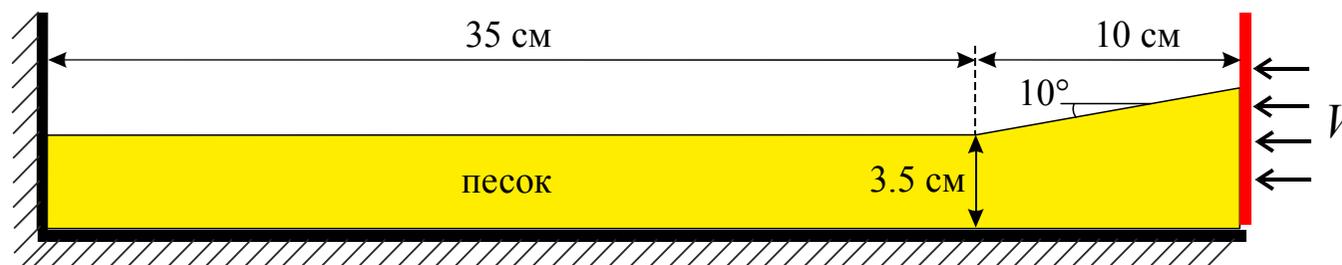


Постановка задачи о сжатии

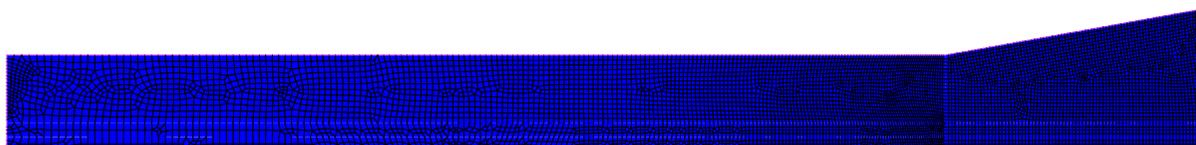
Функция текучести Хубера-Мизеса

$$E = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}, \nu = 0.25, \sigma_y = 16.36 \text{ Па},$$

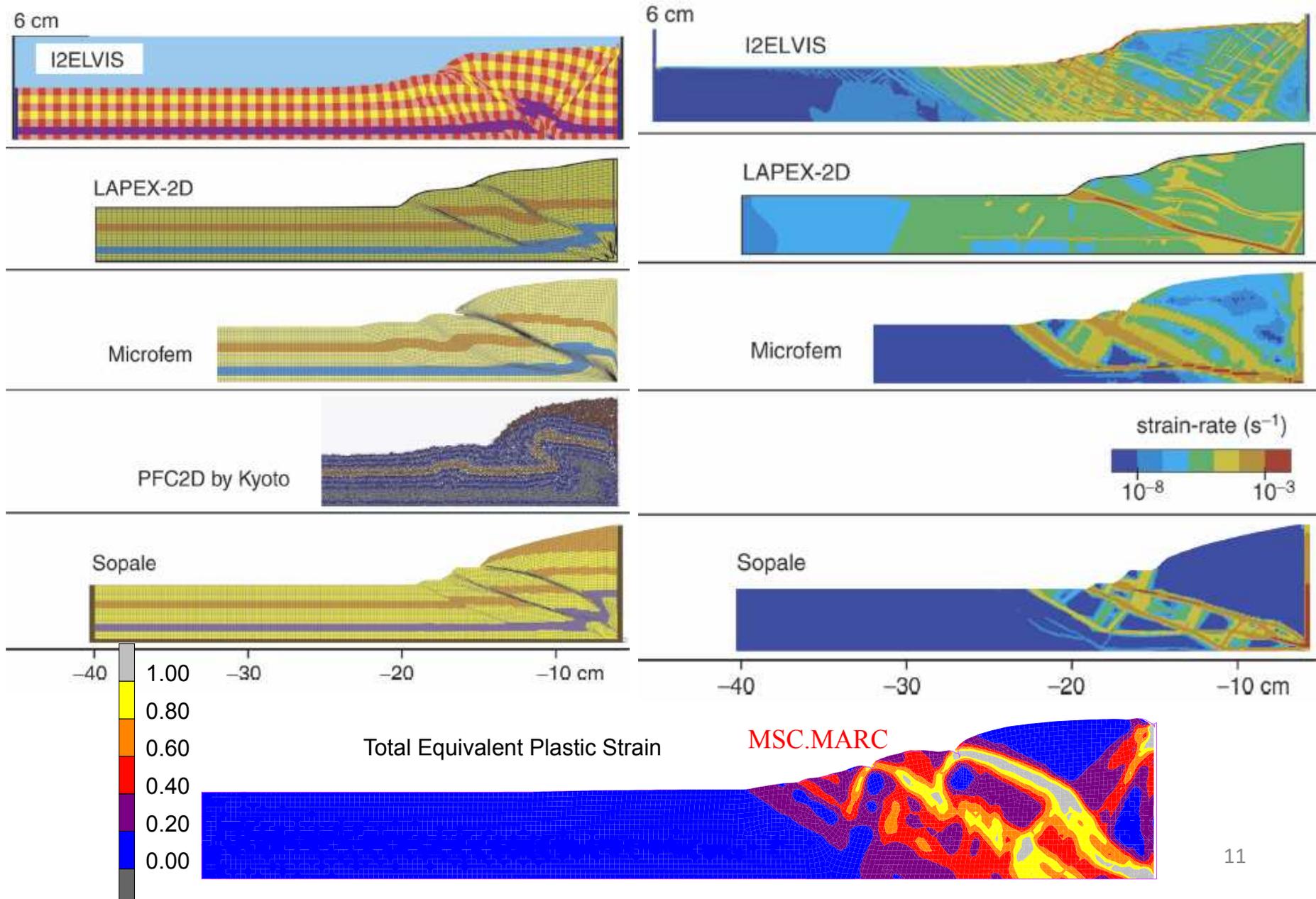
коэффициент трения $\mu = 0.5$



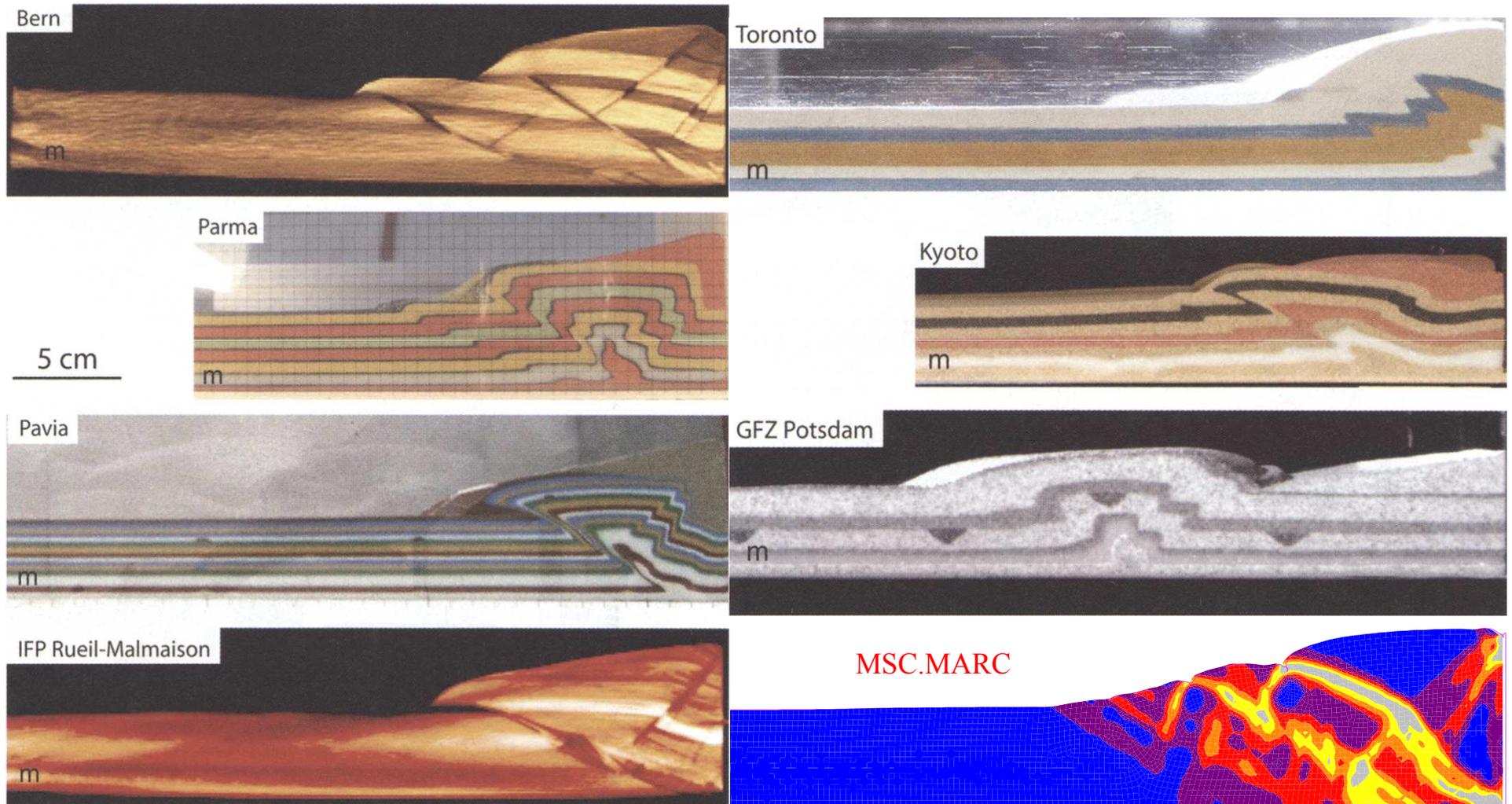
Расчетная область



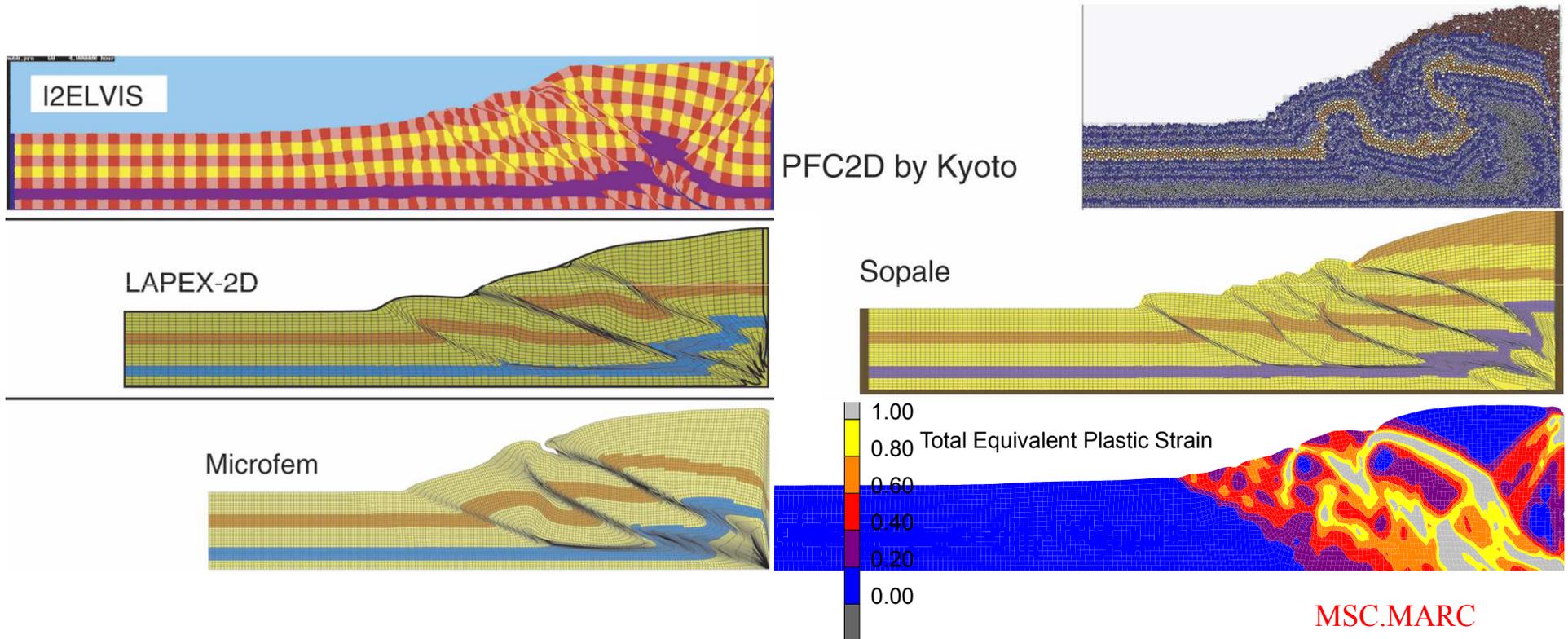
Численный эксперимент (Buiter, S.J.H. et al., 2006), деформированные конфигурации полученные в результате решения задачи с помощью разных программных комплексов, величина смещения правой стенки 6 см.



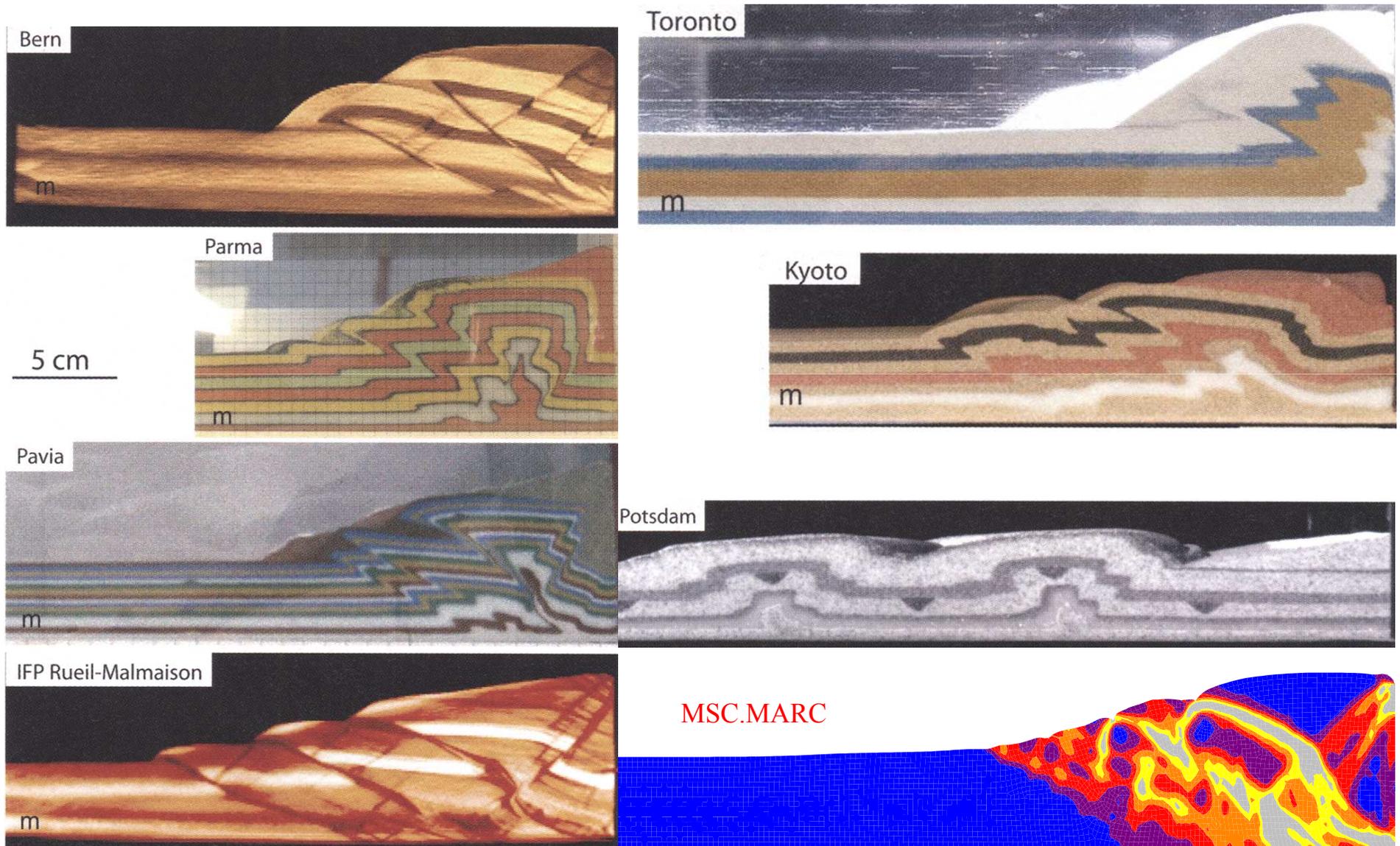
Аналоговый эксперимент, проводимый в различных лабораториях (Schreurs G. et al., 2006) и его сравнение с численным экспериментом. Величина смещения правой стенки 6 см.



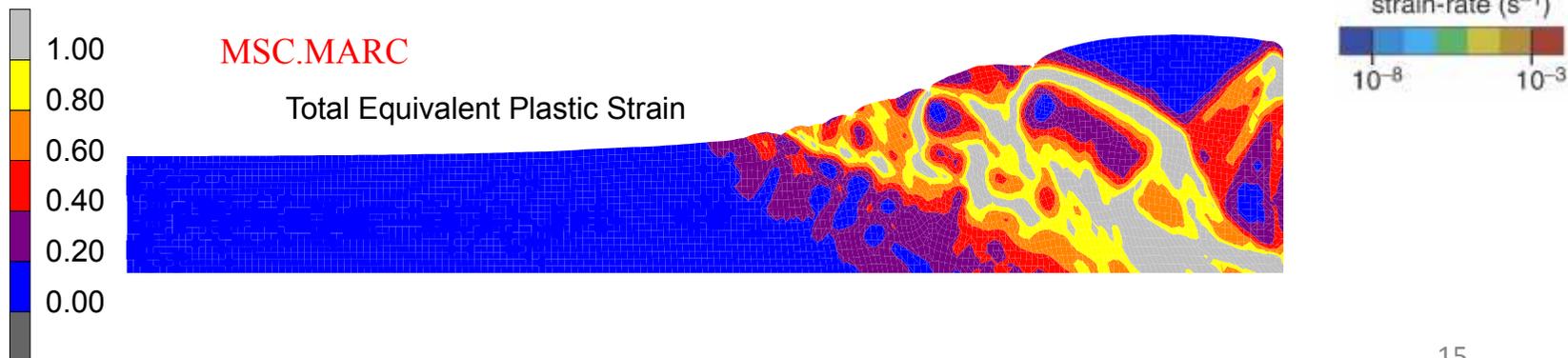
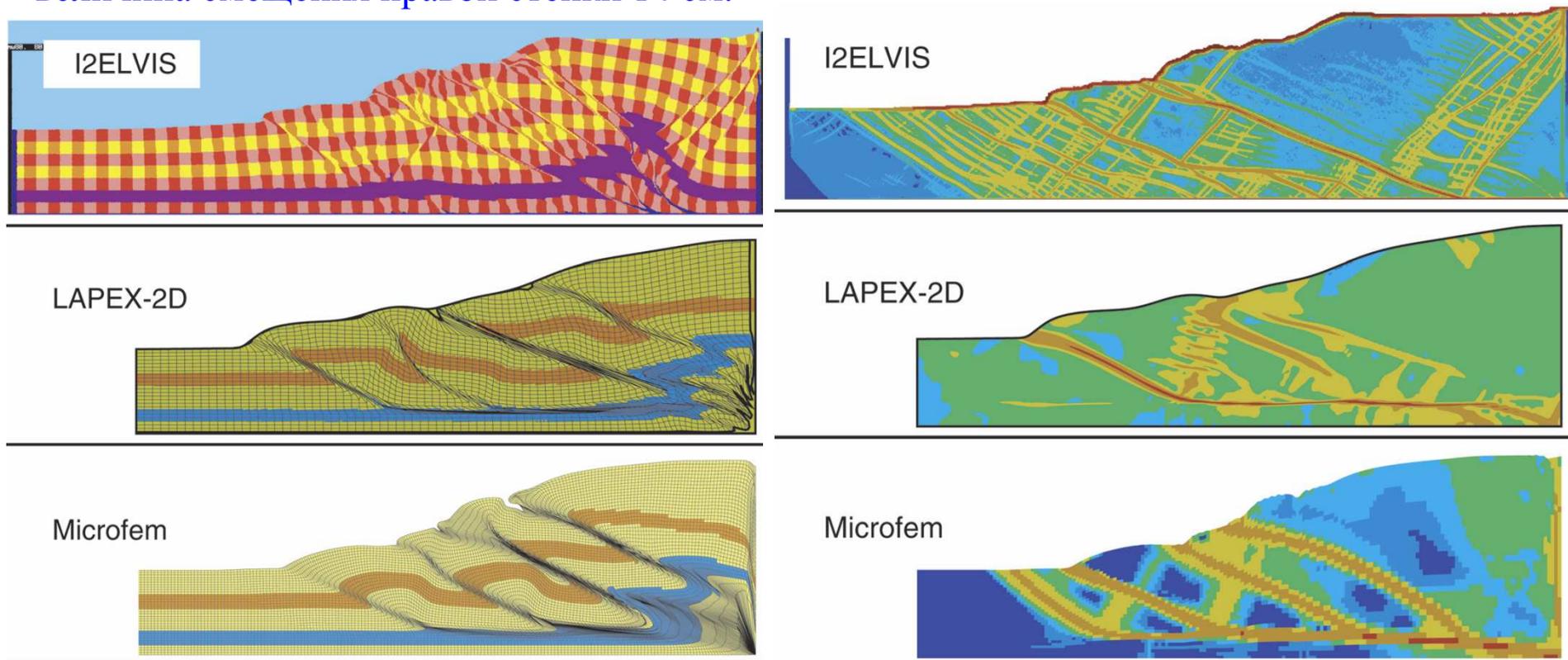
Численный эксперимент (Buitter, S.J.H. et al., 2006), деформированные конфигурации полученные в результате решения задачи с помощью разных программных комплексов, величина смещения правой стенки 10 см.



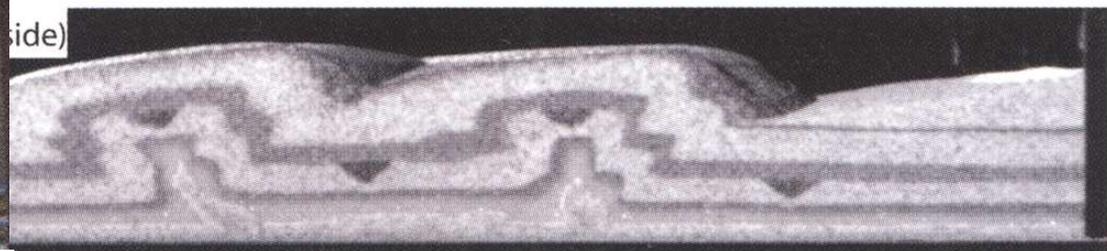
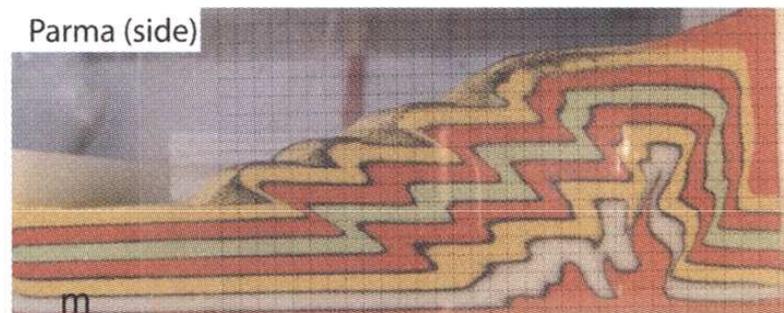
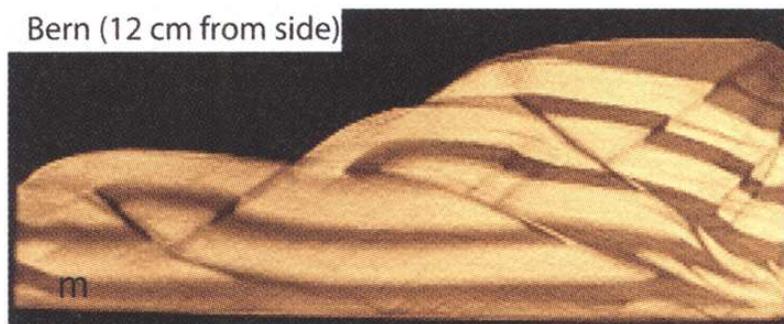
Аналоговый эксперимент, проводимый в различных лабораториях (Schreurs G. et al., 2006) и его сравнение с численным экспериментом. Величина смещения правой стенки 10 см.



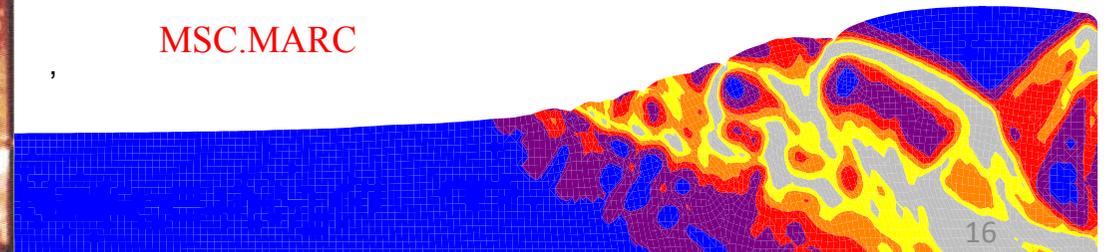
Численный эксперимент (Buiter, S.J.H. et al., 2006), деформированные конфигурации полученные в результате решения задачи с помощью разных программных комплексов, величина смещения правой стенки 14 см.



Аналоговый эксперимент, проводимый в различных лабораториях (Schreurs G. et al., 2006) и его сравнение с численным экспериментом. Величина смещения правой стенки 14 см.

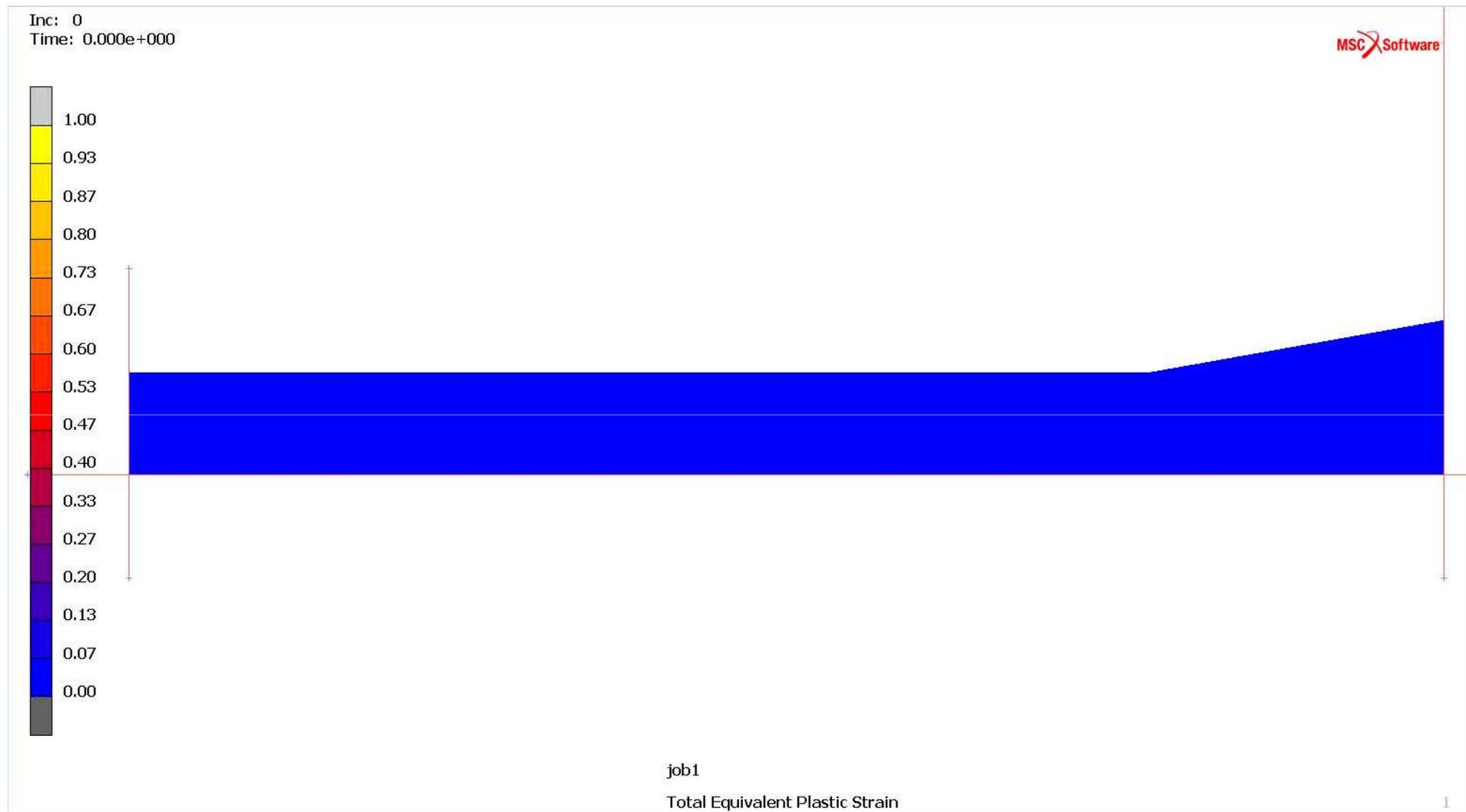


MSC.MARC





Моделирование авторов. Величина смещения правой стенки 14 см.





Постановка задачи

Растяжение песка в ящике, международный тест
(Buiter, S.J.H. et al. 2006, Schreurs G. et al. 2006)

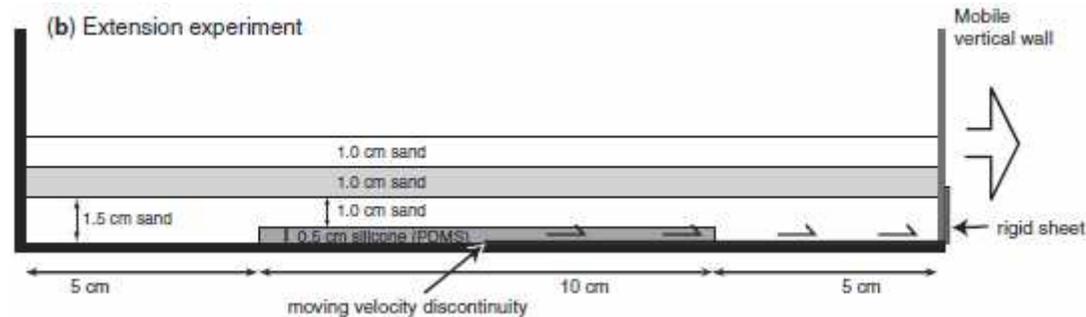


Table 1. Material properties

Material	Values in numerical models					Measured analogue properties*				
	Density (kg m^{-3})	C (Pa)	$\phi_{\text{peak}}^{\dagger}$	$\phi_{\text{stable}}^{\dagger}$	η (Pa s)	Density (kg m^{-3})	C (Pa)	$\phi_{\text{peak}}^{\dagger}$	$\phi_{\text{stable}}^{\dagger}$	η (Pa s)
Sand	1560	10	36°	31°		1350–1740	3–150	33°–45°	28.2°–39°	
Microbeads	1480	10	22°	20°		1400–1600	–25–50	21°–29.2°	20°–26.2°	
PDMS	965				5e4	965				5e4
Side friction		0	19°	19°				20° [§]	16°–17° [§]	



Постановка задачи о растяжении

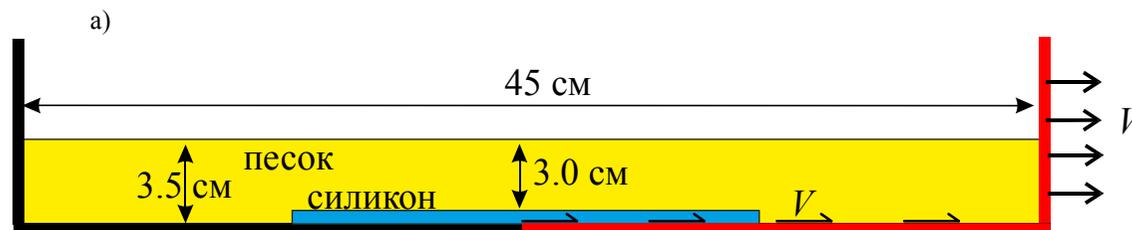
Функция текучести Друкера-Прагера

$$E = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad \nu = 0.25, \quad \sigma_y = 14.0 \text{ Па},$$

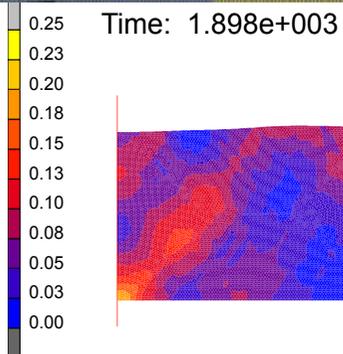
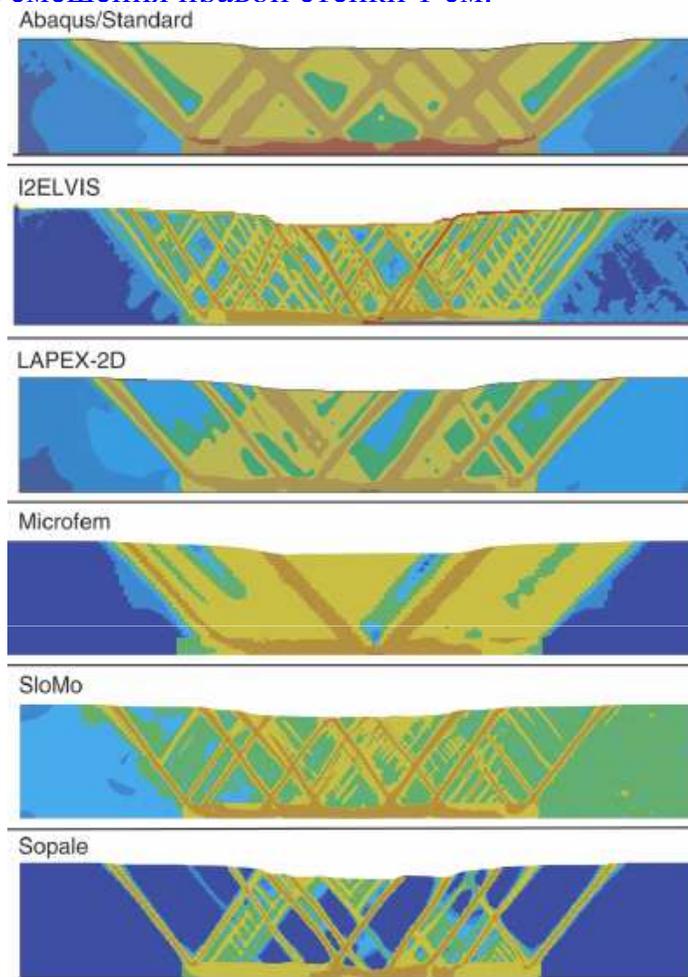
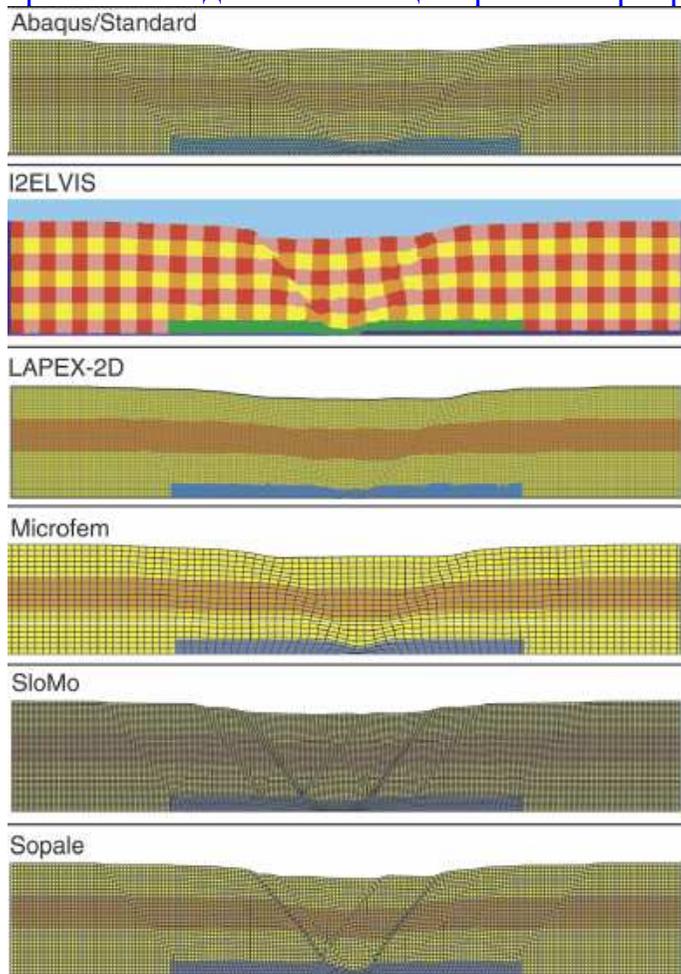
угол внутреннего трения $\Phi = 12^\circ$

коэффициент трения $\mu = 0.5$

вязкость силикона $\eta = 5 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{сек}$

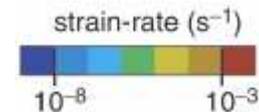
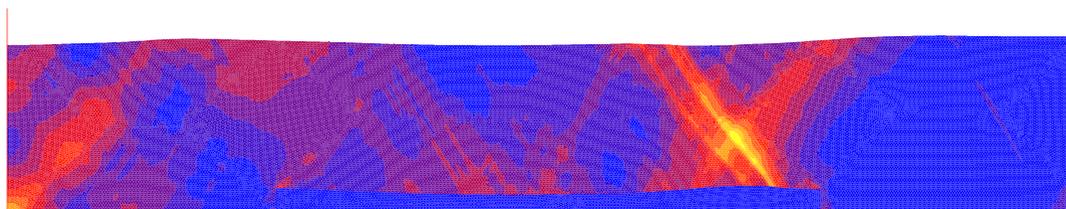


Численный эксперимент (Buijter, S.J.H. et al., 2006), деформированные конфигурации полученные в результате решения задачи с помощью разных программных комплексов, величина смещения правой стенки 1 см.



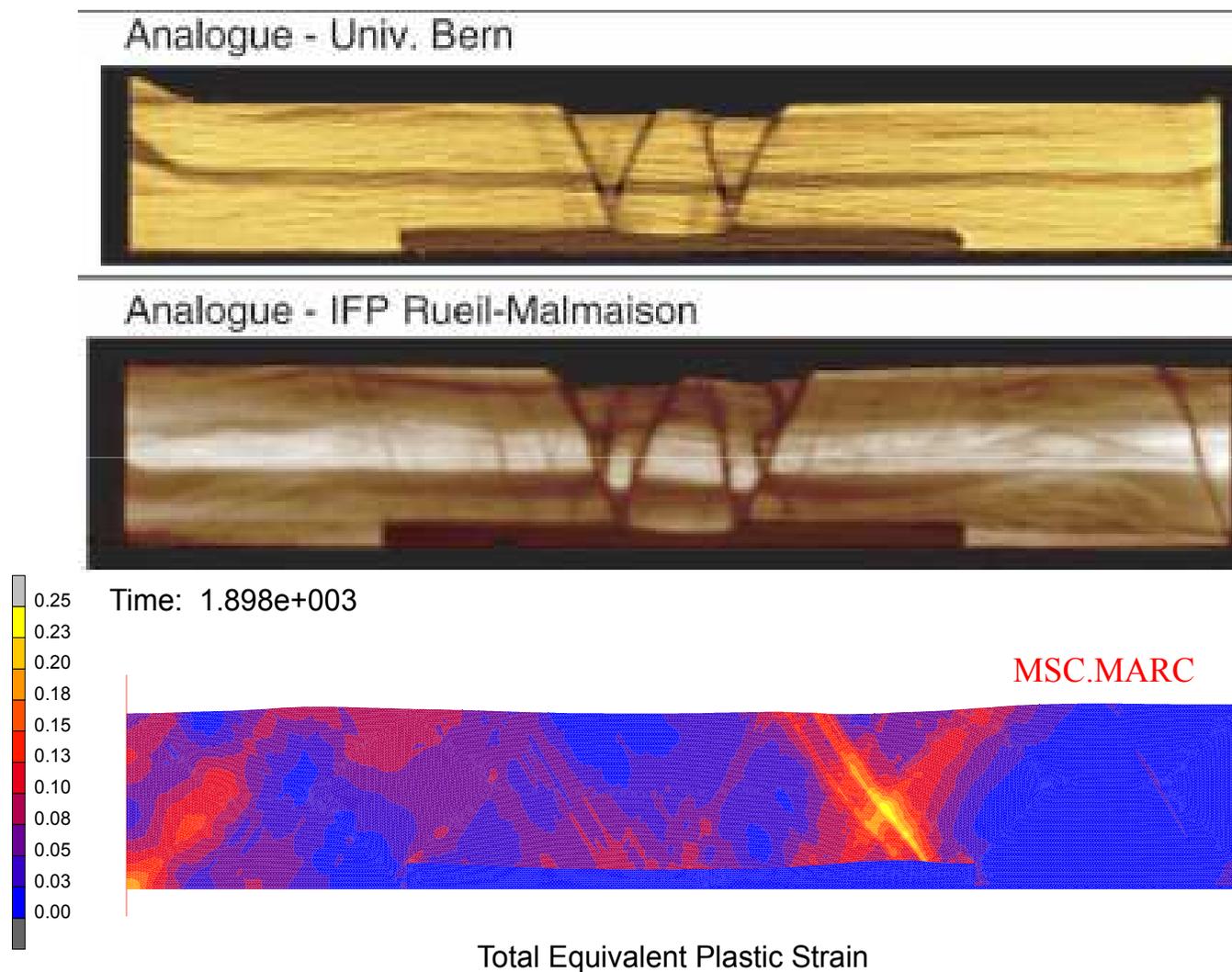
Time: 1.898e+003

MSC.MARC

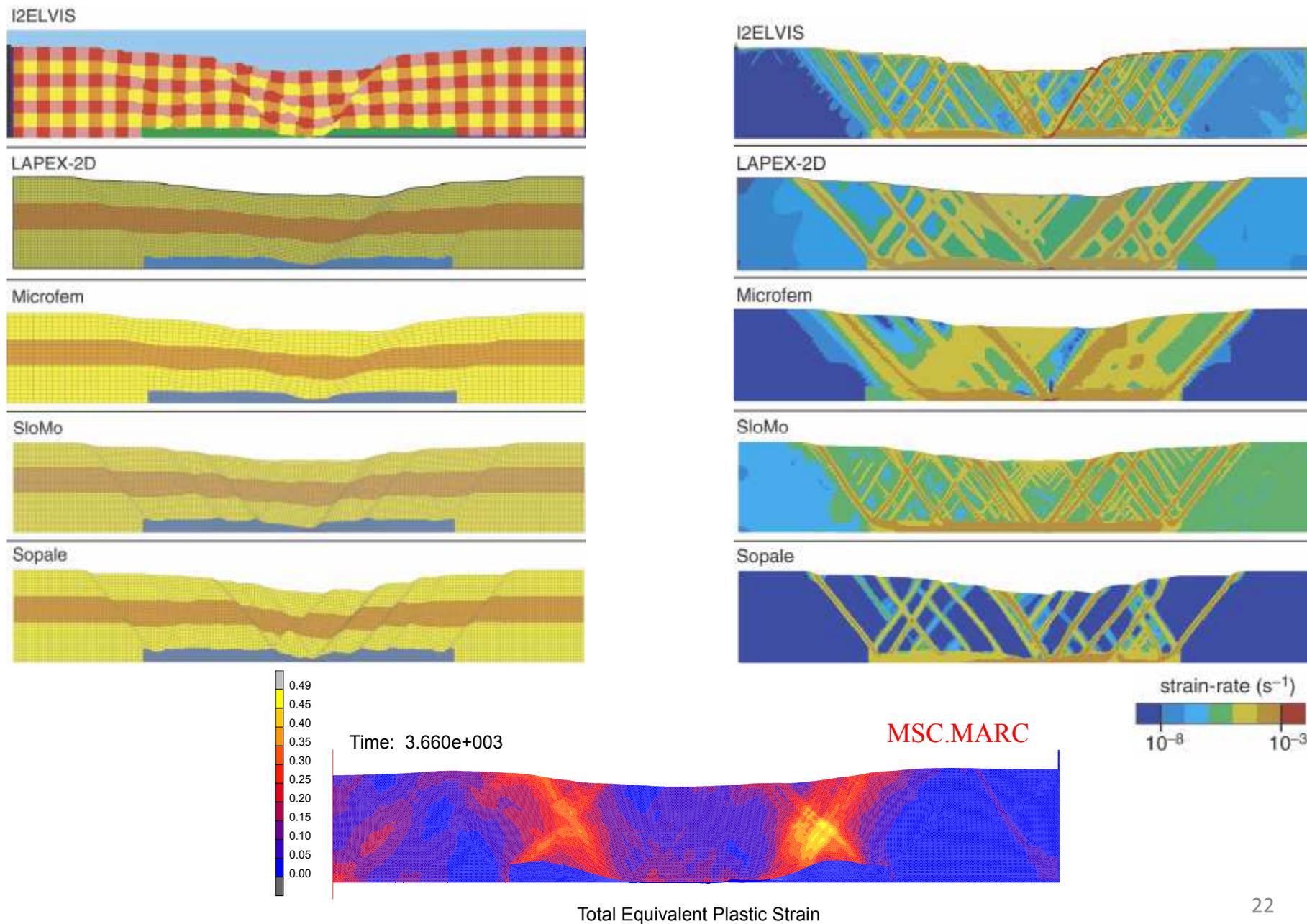


Total Equivalent Plastic Strain

Аналоговый эксперимент, проводимый в различных лабораториях (Schreurs G. et al., 2006) и его сравнение с численным экспериментом. Величина смещения правой стенки 1 см.

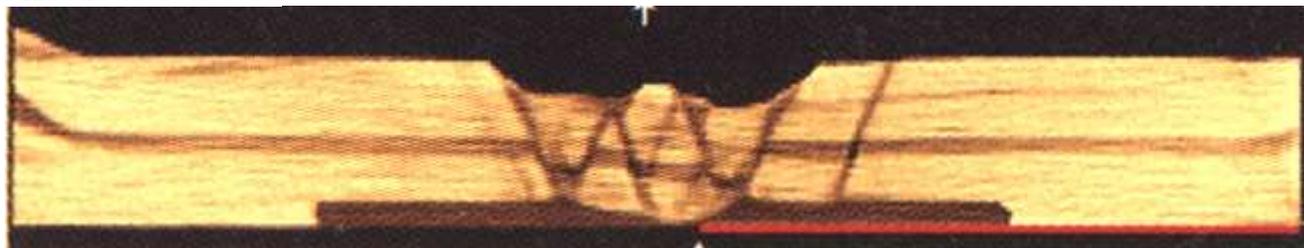


Численный эксперимент (Buiter, S.J.H. et al., 2006), деформированные конфигурации полученные в результате решения задачи с помощью разных программных комплексов, величина смещения правой стенки 2 см.

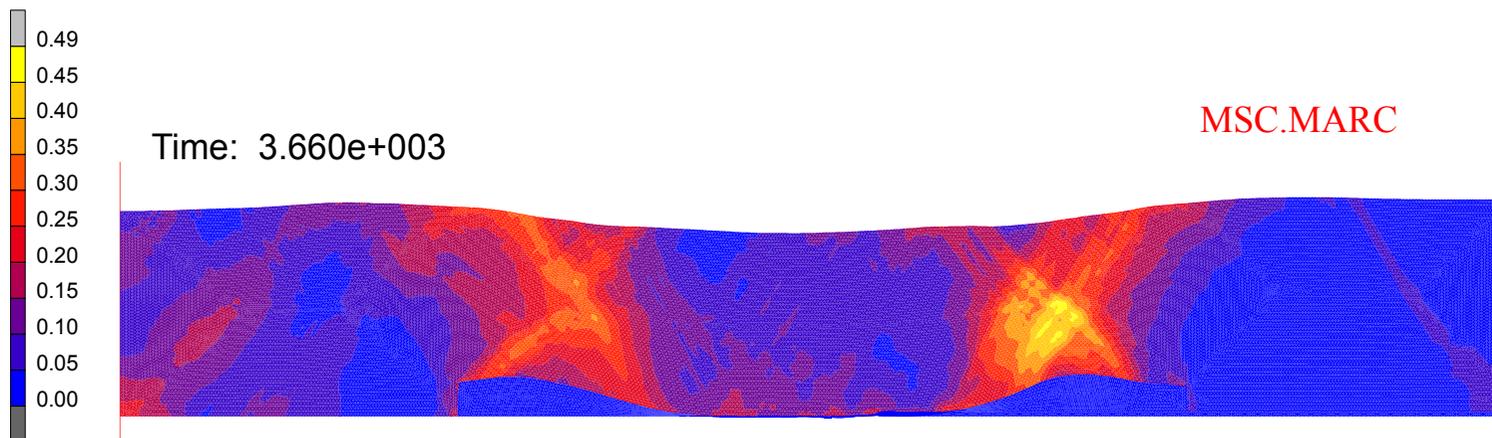
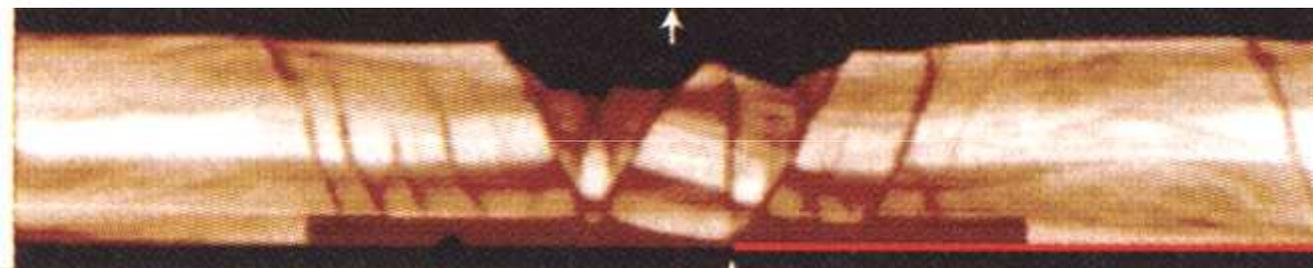


Аналоговый эксперимент (Schreurs G. et al., 2006) и его сравнение с численным экспериментом. Величина смещения правой стенки 2 см.

(a) Bern



(b) IFP Rueil-Malmaison



Total Equivalent Plastic Strain

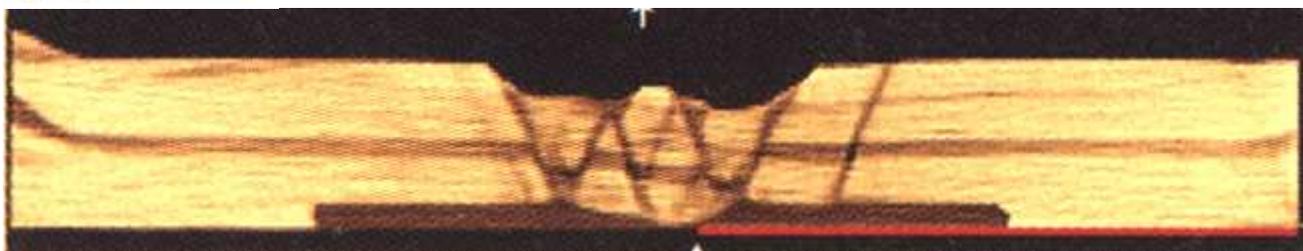
Аналоговый эксперимент (Schreurs G. et al., 2006) и его сравнение с численным экспериментом. Величина смещения правой стенки 2 см.

Функция текучести Хубера-Мизеса

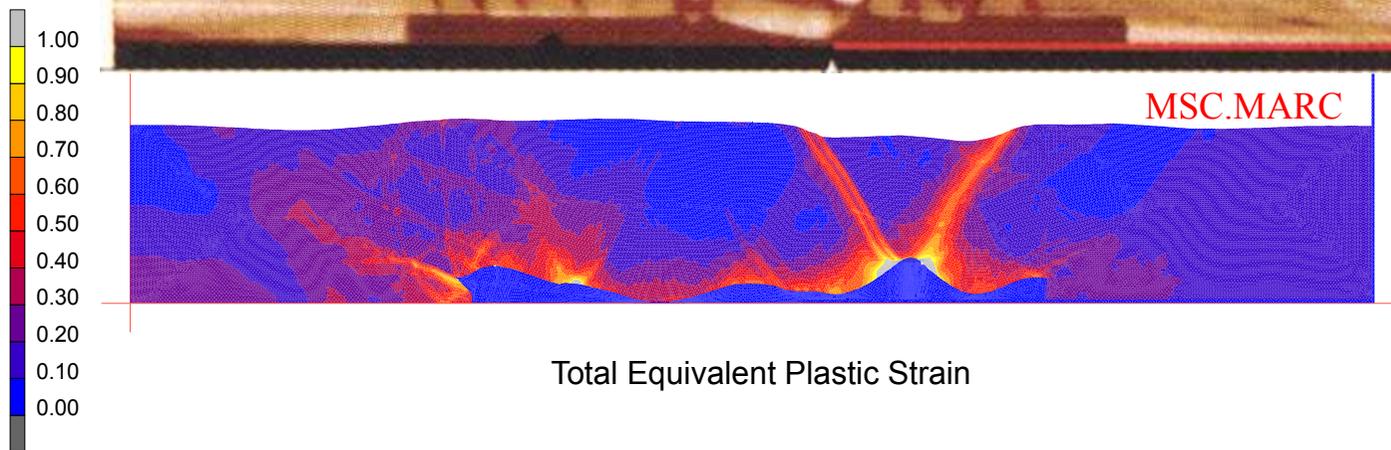
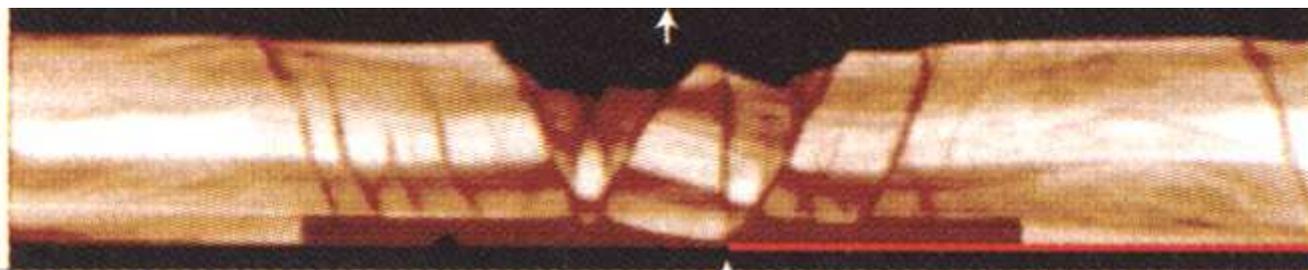
$E = 5 \cdot 10^5$ Па, $\nu = 0.25$, $\sigma_y = 14.0$ Па, коэффициент трения $\mu = 0.5$

вязкость силикона $\eta = 5 \cdot 10^4$ Па·сек

(a) Bern



(b) IFP Rueil-Malmaison



Inc: 0
Time: 0.000e+000



job1

Total Equivalent Plastic Strain

1



Выводы

- Показано удовлетворительное совпадение результатов численного моделирования с результатами других авторов, указана важность выбора реологического закона материала.
- В результате подходящего выбора реологического закона, констант материалов показано удовлетворительное согласование результатов математического моделирования с натурными экспериментами.
- По результатам сравнения численных экспериментов с экспериментами, полученными на других пакетах прикладных программ можно сделать выводы о применимости пакета прикладных программ **MSC.Marc** к задачам математического моделирования образования надвигов, складок и впадин.
- Отдельно на результаты математического моделирования влияет и геометрические неоднородности, не смотря на то, что они могут составлять малую величину от масштаба самой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта ОНЗ-6, ИП СО РАН №12, гранта РФФИ 12-08-00707.

Спасибо за внимание!